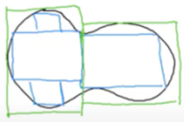
Опр. 2 Мн-во $A \subset \mathbb{R}^2$ наз-ся <u>ограниченным</u>, если $\exists R > 0$, т.ч. $A \subset B_R(O)$, $O = (0,0)$.

<u>Плоской фигурой</u> будем называть произвольное ограниченное мн-во $F \subset \mathbb{R}^2$.

Опр. 3 <u>Простейшими</u> будем называть фигуры, представляющие собой объединение конечного числа прямоуг-ков со сторонами $\parallel$ осям координат.

Опр. 4 <u>Верхней (нижней) площадью</u> фигуры F наз-ся $S^*(F) = \inf\limits_{Q \supset F}\{S(Q)\}$ $\left(S_*(F) = \sup\limits_{P \subset F}\{S(P)\}\right)$, где inf берётся по всем простейшим фигурам Q, содержащим F; sup – по всем простейшим P, содерж-ся в F.



Замеч-е: $S^*(F)$ сущ-т в силу того, что $S(Q) \geq 0$; $S_*(F)$ – в силу огр-ти F.

Из опр-я $\Rightarrow$ $S_*(F) \leq S^*(F)$

Опр. 5 Фигура F наз-ся <u>квадрируемой</u>, если $S_*(F) = S^*(F)$. В этом случае $S(F) := S_*(F) = S^*(F)$ – <u>площадь</u> F.

Лемма 1 Фигура F квадр-ма $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$ – простейшие, т.ч. $P \subset F \subset Q$, причем $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

<u>Д-во</u>: ($\Rightarrow$) $S^*(F) = S_*(F) =: S(F)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Из опр-я $\Rightarrow$ $\exists Q \supset F$ – простейшая, т.ч. $0 \leq S(Q) - S(F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично $\exists P \subset F$ – простейшая, т.ч. $0 \leq S(F) - S(P) < \varepsilon/2$

$\Rightarrow$ $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$, т.ч. $P \subset F \subset Q$ и $S(Q) - S(P) < \varepsilon$

Заметим, что $S(P) \leq S_*(F) \leq S^*(F) \leq S(Q)$ $\Rightarrow$

$0 \leq \underbrace{S^*(F)}_{} - \underbrace{S_*(F)}_{\text{не зависят от } \varepsilon} \leq S(Q) - S(P) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $S^*(F) = S_*(F)$.

ч.т.д.

Лемма 2 Фигура F квадр-ма $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_1, F_2$ – квадр-е фигуры, т.ч. $F_1 \subset F \subset F_2$, причем $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon$.

<u>Д-во</u>: ($\Rightarrow$) сразу следует из л.1, т.к. простейшие явл-ся квадрируемыми.

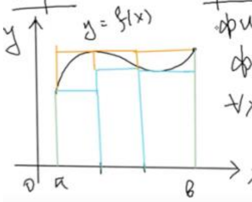
($\Leftarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть F_1, F_2 – квадр-мы, $F_1 \subset F \subset F_2$, $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon/2$. Из л.1 $\Rightarrow$ $\exists P_1, Q_1, P_2, Q_2$ – простейшие, т.ч. $P_j \subset F_j \subset Q_j$; $S(Q_j) - S(P_j) < \varepsilon/4$; $j = 1, 2$.

Тогда $P_1 \subset F_1 \subset F \subset F_2 \subset Q_2$. $S(Q_2) - S(P_1) =$

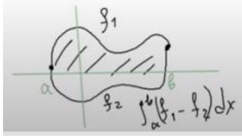
$= \underbrace{S(Q_2) - S(P_2)}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{S(P_2) - S(Q_1)}_{\leq S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon/2} + \underbrace{S(Q_1) - S(P_1)}_{<\varepsilon/4} < \varepsilon$ $\Rightarrow$ F квадр-ма (л.1) ч.т.д.

$\leq S(F_2)$, $\geq S(F_1)$

Опр. 6 <u>Криволинейной трапецией</u> наз-ся фигура F, ограниченная графиком ф-ции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $f \in C[a,b]$; вертик-ми прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox.



<u>Т.1</u> Криволинейная трапеция F квадрируема и $S(F) = \int_a^b f(x)\,dx$.



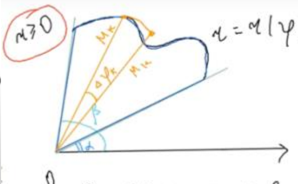
<u>Д-во</u>: $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ – разб-е $[a,b]$: $S_f(T) - s_f(T) < \varepsilon$. С др. стороны, $S_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} S(Q_k) = S(Q)$, где $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$ – простейшая, Q_k – прямоуг-к со сторонами $[0, M_k]$ и $[x_{k-1}, x_k]$. При этом $Q \supset F$. Аналогично $s_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} S(P_k) = S(P)$, $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ – простейшая, $P \subset F$. Значит, $P \subset F \subset Q$, $S(Q) - S(P) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ F квадр-ма (л.1).

Далее,

$$\left.\begin{array}{ccccc} s_f(T) & \leq & \int_a^b f(x)\,dx & \leq & S_f(T) \\ \| & & & & \| \\ S(P) & \leq & S(F) & \leq & S(Q) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\left|\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - S(F)}_{\text{не зависят от } \varepsilon}\right| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $S(F) = \int_a^b f(x)\,dx$. ч.т.д.

Опр. 7 <u>Криволинейным сектором</u> наз-ся фигура, огр-я кривой $r = r(\varphi)$ в полярных коор-тах; $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $r \in C[\alpha, \beta]$, и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. $(\beta - \alpha < 2\pi)$



<u>Т.2</u> Криволинейный сектор F квадр-м и $S(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.

<u>Д-во</u>: Обозначим $f = \frac{1}{2}r^2$. $f \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ – разб-е $[\alpha, \beta]$: $S_f(T) - s_f(T) < \varepsilon$. С др. стороны, $S_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{\tfrac{1}{2}M_k^2 \Delta\varphi_k}_{\text{площадь круг. сектора}} = \sum\limits_{k=1}^{n} S(F_k^1) = S(F^1)$, где

$M_k = \sup\limits_{\varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k} r(\varphi)$

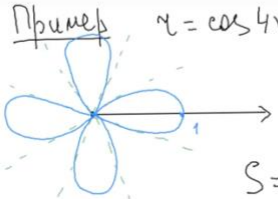
$F^1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k^1$ – квадр-я, F_k^1 – круг. сектор радиуса M_k и раствора $\Delta\varphi_k$; $F^1 \supset F$.

Аналогично $s_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k = \sum\limits_{k=1}^{n} S(F_k^2) = S(F^2)$, где F^2 – квадр-я, $F^2 \subset F$.

Значит, $F^2 \subset F \subset F^1$, $S(F^1) - S(F^2) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ F квадр-ма. Далее как в т.1. ч.т.д.

Если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_1 \leq t \leq t_2$, то $S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$.

<u>Пример</u> $r = \cos 4\varphi$



$\cos 4\varphi \geq 0$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 4\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos^2 4\varphi = 4\int_0^{\pi/8} \frac{1 + \cos 8\varphi}{2}\,d\varphi =$

$= 4\left(\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/8} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\sin 8\varphi\Big|_0^{\pi/8}}_{=0}\right) = \pi/4.$